اثبات یک فرمول به روش‌های متفاوت

کیوان عباس‌زاده اسک‌شهری
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

ابتدا با طرح یک مسئله شروع می‌کنیم. مجموع زیر را به‌دست آورید:

$۱+۲+۳+ ... +۱۰۰۰$

مسئله کاملاً واضح است. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را جمع کنیم. یکی از راه‌های به‌دست آوردن مجموع بالا این است که از عدد ۱ شروع کنیم و یکی‌یکی اعداد را جمع کنیم (راه‌حلی که به ذهن هر کسی می‌رسد). اما این کار اصلاً جالب نیست و علاوه بر آن به زمان زیادی نیاز دارد. بنابراین باید به دنبال راه‌حلی هوشمندانه و البته زیبا باشیم. فرض کنیم مجموع برابر S است؛ یعنی:

$S=۱+۲+۳+ ... +۱۰۰۰$

حال می‌توان مجموع بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$S=(۱۰۰۱-۱۰۰۰)+(۱۰۰۱-۹۹۹)+(۱۰۰۱-۹۹۸)$$
$$+...+(۱۰۰۱-۱)$$

بعد از مرتب کردن جملات داریم:

$$S=\underbrace{(۱۰۰۱+۱۰۰۱+...+۱۰۰۱)}_{\text{۱۰۰۰ بار}}$$
$$-(۱+۲+۳+...+۹۹۸+۹۹۹+۱۰۰۰)$$
$$\rightarrow S=(۱۰۰۰\times ۱۰۰۱)-S$$
$$\rightarrow ۲S=۱۰۰۰\times ۱۰۰۱$$
$$\rightarrow S=\frac{۱۰۰۰\times ۱۰۰۱}{۲}$$

اکنون با استفاده از راه‌حل بالا می‌توان به فرمول کلی زیر دست یافت:

$$۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

در ادامه به روش‌های متفاوت فرمول بالا را اثبات می‌کنیم.

روش اول

مشابه آنچه در بالا گفته شد، عمل می‌کنیم. فرض کنیم مجموع موردنظر برابر S است؛ یعنی:

$S=۱+۲+۳+...+N$

حال می‌توان مجموع بالا را به‌صورت زیر نوشت:

$$S=(N+۱-N)+(N+۱-(N-۱))$$
$$+(N+۱-(N-۲))+...+(N+۱-۱)$$

بعد از مرتب کردن جملات بالا داریم:

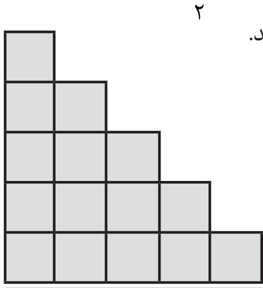
$$S=\underbrace{((N+۱)+(N+۱)+...+(N+۱))}_{\text{N بار}}$$
$$-(۱+۲+...+(N-۱)+N)$$
$$\rightarrow S=(N\times(N+۱))-S$$
$$\rightarrow ۲S=N(N+۱)$$
$$\rightarrow S=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

روش دوم

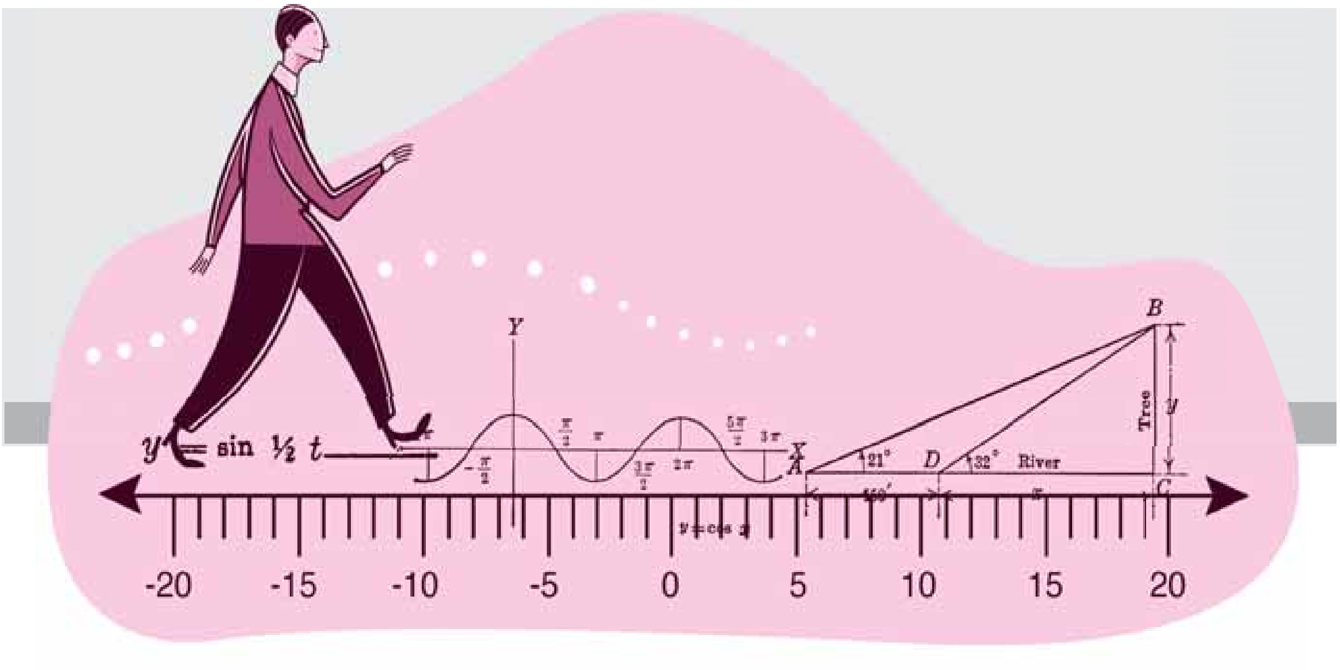
حال می‌خواهیم به یک روش هندسی بسیار زیبا فرمول بالا را ثابت کنیم. ابتدا به‌جای عدد N یک عدد بسیار کوچک مثلاً ۵ می‌گذاریم تا روش اثبات به خوبی ملموس شود. بنابراین می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$۱+۲+۳+۴+۵=\frac{۵\times ۶}{۲}$$

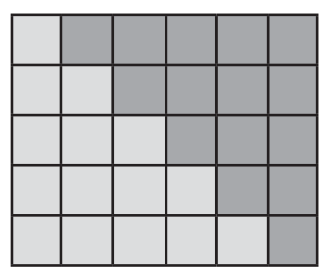
به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱.



تعداد مربع‌های کم‌رنگ در شکل ۱ برابر ۵+۴+۳+۲+۱ است. زیرا از بالا در ردیف اول ۱ مربـع، در ردیف دوم ۲ مربع و به‌همین ترتیـب در ردیف پنجم ۵ مربع واقع است. حال تعداد این مربع‌ها را به روش دیگری به‌دست می‌آوریم. شکل ۱ را به شکل ۲ تبدیل می‌کنیم.



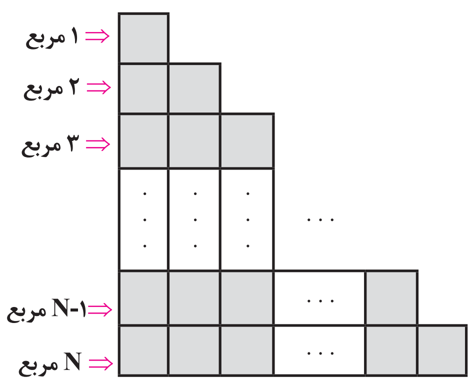
شکل ۲.

تعـداد کل مربع‌ها در شـکل ۲، چـه پررنگ و چه کم‌رنگ، برابر است با ۶×۵. از طرف دیگر، تعداد مربع‌های کم‌رنگ با تعداد مربع‌های پررنگ برابر است. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ برابر است با: $\frac{۵\times۶}{۲}$

بنابراین تعـداد مربع‌های کم‌رنگ از یک طرف برابر است با: ۵+۴+۳+۲+۱ و از طرف دیگر برابر است با: $\frac{۵\times۶}{۲}$.
نتیجه می‌گیریم:

$$۱+۲+۳+۴+۵=\frac{۵\times۶}{۲}$$

حـال می‌توان بـا اسـتفاده از روش بـالا فرمول را در حالـت کلـی اثبـات کـرد. بـه شـکل ۳ توجه کنید.

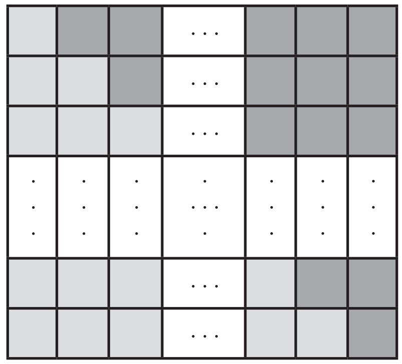


شکل ۳.

در شـکل ۳ در ردیف اول ۱ مربع، در ردیف دوم ۲ مربع، در ردیف سوم ۳ مربع و به‌همین ترتیب در ردیف آخـر (ردیف Nام) N مربع وجود دارد. در واقع از بالا به پایین که می‌آییم، تعداد مربع‌ها در هر ردیف یک واحد افزایش می‌یابد. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ در شـکل ۳ برابر است با:

۱+۲+۳+...+N

تعـداد مربع‌هـای کم‌رنـگ را بـه روش دیگـری می‌شماریم. شکل ۳ را به شکل ۴ تبدیل می‌کنیم.



شکل ۴.

تعداد کل مربع‌ها، چه پررنگ و چه کم‌رنگ، در شکل ۴ برابر $N(N+۱)$ است. از طرف دیگر، تعداد مربع‌های کم‌رنگ با تعداد مربع‌های پررنگ برابر است. پس تعداد مربع‌های کم‌رنگ برابر است با:

$$\frac{N(N+۱)}{۲}$$

بنابراین تعداد مربع‌های کم‌رنگ از یک طرف برابر $۱+۲+۳+...+N$ و از طرف دیگر برابر $\frac{N(N+۱)}{۲}$ است. نتیجه می‌گیریم:

$$۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

روش سوم

می‌خواهیم حکم زیر را ثابت کنیم:

$$P(N):۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}$$

با استقرا روی عدد N حکم بالا را اثبات می‌کنیم.

حکم به ازای $N=۱$ درست است زیرا $\frac{۱\times ۲}{۲}=۱$. پس $P(۱)$ برقرار است. حال فرض کنیم حکم برای $N-۱$ برقرار است یعنی داریم:

$$P(N-۱):۱+۲+۳+...+(N-۱)=\frac{N(N-۱)}{۲}$$

اکنون حکم را برای عدد N اثبات می‌کنیم. یعنی ثابت می‌کنیم $P(N)$ برقرار است. داریم:

$$\begin{aligned}۱+۲+۳+...+N&=(۱+۲+۳+...+(N-۱))+N\\&=\frac{N(N-۱)}{۲}+N\\&=\frac{N(N-۱)+۲N}{۲}\\&=\frac{N^۲+N}{۲}\\&=\frac{N(N+۱)}{۲}\end{aligned}$$

پس حکم برای N نیز درست است؛ یعنی $P(N)$ درست است. در نتیجه حکم برای تمام اعداد طبیعی N صحیح است.

روش چهارم

در اینجا ابتدا اتحادی بسیار زیبا و کاربردی از ترکیبیات را اثبات می‌کنیم:

اتحاد چوشی ـ چی: فرض کنید k و N دو عدد طبیعی هستند. آن‌گاه داریم:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+۱}{k}+...+\binom{N}{k}=\binom{N+۱}{k+۱}$$

اثبات: از «اتحاد پاسکال» استفاده می‌کنیم:

$$\binom{m}{k}=\binom{m+۱}{k+۱}-\binom{m}{k+۱}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\binom{k}{k}+\binom{k+۱}{k}+...+\binom{N}{k}&=\sum_{m=k}^{N}\binom{m}{k}\\&=\sum_{m=k}^{N}\binom{m+۱}{k+۱}-\binom{m}{k+۱}\end{aligned}$$

حال طبق قاعدهٔ ادغام (تلسکوپی) داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{N}\binom{m+۱}{k+۱}-\binom{m}{k+۱}&=\binom{N+۱}{k+۱}-\binom{k}{k+۱}\\&=\binom{N+۱}{k+۱}\end{aligned}$$

در نتیجه اتحاد چوشی ـ چی ثابت می‌شود. البته اتحاد چوشی ـ چی اثبات‌های گوناگونی دارد که می‌توان آن‌ها را در کتاب‌های ترکیبیات یافت.

حال در اتحاد چوشی ـ چی قرار دهید $k=۱$. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}&\binom{۱}{۱}+\binom{۱+۱}{۱}+...+\binom{N}{۱}=\binom{N+۱}{۱+۱}\\&\to\binom{۱}{۱}+\binom{۲}{۱}+...+\binom{N}{۱}=\binom{N+۱}{۲}\\&\to ۱+۲+۳+...+N=\frac{N(N+۱)}{۲}\end{aligned}$$